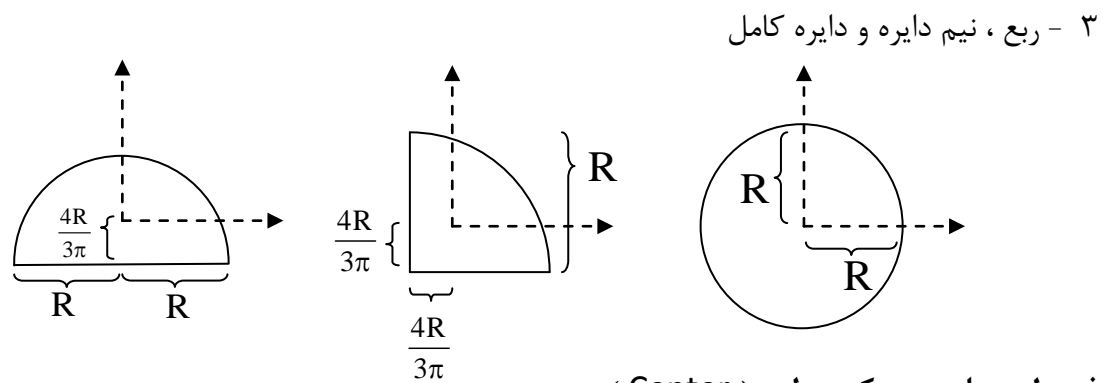
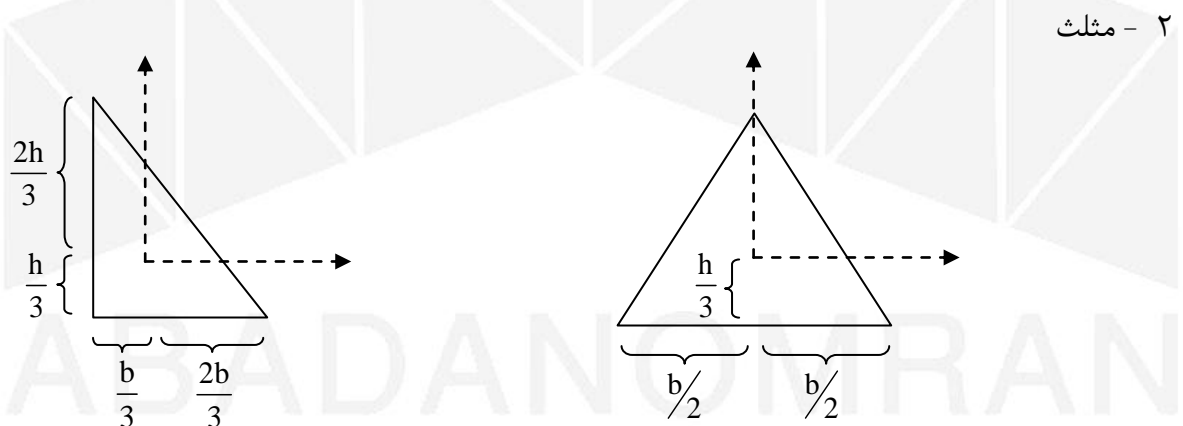
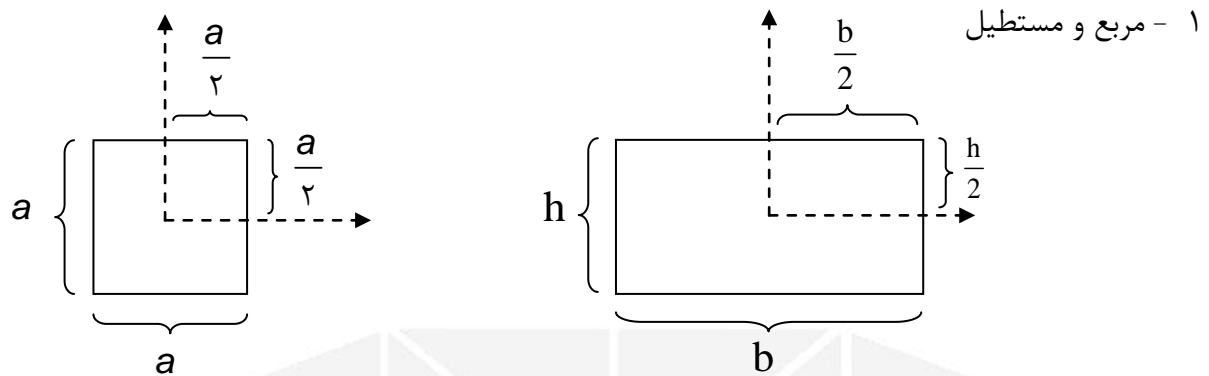


محاسبه مرکز هندسی اجسام

الف) مرکز سطح اشکال هندسی منتظم:

بدین منظور می بایست شکل های مختلف را به اشکال ساده هندسی منتظم تبدیل کرده و با استفاده از مختصات معین مرکز سطح آن ها، مرکز سطح شکل کلی را محاسبه نمود.



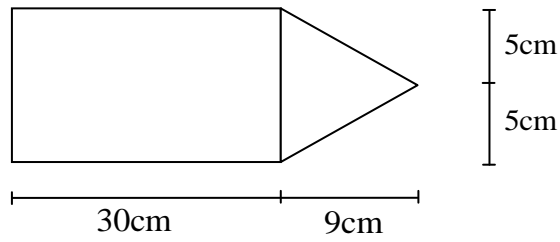
فرمول محاسبه مرکز سطح (Center)

مختصات X و Y مرکز سطح شکل عبارتند از:

$$X_C = \frac{\sum X_i A_i}{\sum A_i} \quad Y_C = \frac{\sum Y_i A_i}{\sum A_i}$$

مختصه $Y_i A_i$: مختصه ی مرکز سطح شکل منتظم ضربدر مساحتش

مثال (مرکز سطح شکل مقابل را محاسبه کنید :



با توجه به شکل مقابل مختصه ی Y مرکز سطح

دقیقا در وسط قرار می گیرد یعنی در خط تقارن

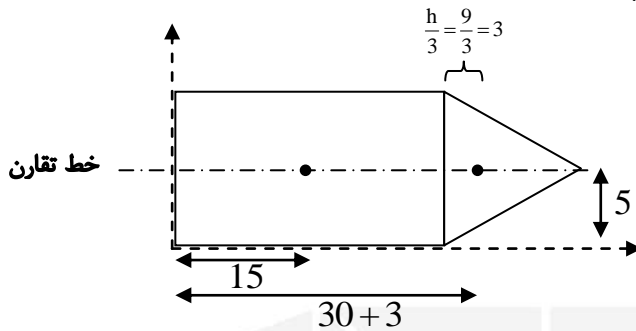
آن که از نوک شکل می گذرد .

پس می بایست فقط مختصه X مرکز سطح را بیابیم :

شکل را به مبدا مختصات برده و از مختصات

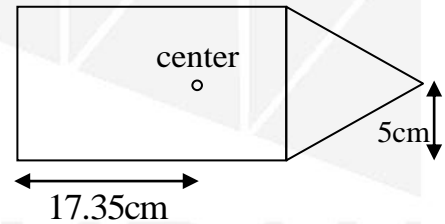
مرکز سطح هر شکل جهت محاسبه در فرمول

به کار می بریم .

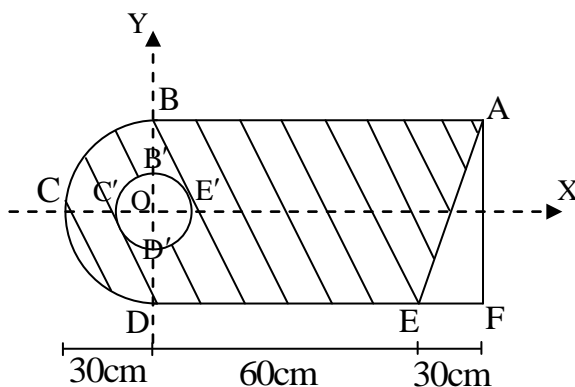


$$X_c = \frac{15 \times (30 \times 10) + (30 + 3) \times \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)}{(30 \times 10) + \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)} = \frac{4500 + 1485}{300 + 45} = 17.35 \text{ cm}$$

$$Y_c = \frac{5 \times (30 \times 10) + 5 \times \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)}{(30 \times 10) + \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)} = \frac{1500 + 225}{300 + 45} = 5 \text{ cm}$$



مثال (مرکز سطح شکل زیر را محاسبه کنید :



نیم دایره BCD به شعاع 30 cm به مرکز O

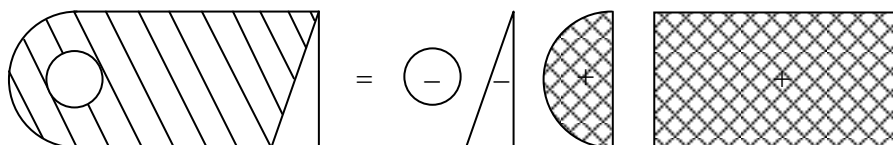
دایره $B'C'D'E'$ به شعاع 12 cm به مرکز O

* برای حل این گونه مسائل که قسمتی از آن توخالی است

می بایست از روش تشکیل جدول استفاده نمود . با در نظر

گرفتن مقدار منفی برای مساحت قسمت های توخالی شکل یعنی :

با در نظر گرفتن یک مستطیل و نیم دایره توپر (مثبت) و یک مثلث و دایره توخالی (منفی) مختصات مرکز سطح بدست می آید.



اشکال	A	\bar{X}	\bar{Y}	$\bar{X}A$	$\bar{Y}A$
ABDF	$60 \times 90 = +5400$	$\frac{60+30}{2} = 45$	0	$45 \times 5400 = 243000$	0
BCD	$\pi \times \frac{30^2}{2} = +1413.72$	$\frac{4R}{3\pi} = -12.73$	0	-18000	0
AEF	$60 \times \frac{30}{2} = -900$	$90 - \frac{30}{3} = 80$	$30 - \frac{60}{3} = -10$	-72000	+9000
B'C'D'E'	$\pi \times 12^2 = +452.39$	0	0	0	0
شکل هاشور خورده	5461.33	$X_c = \frac{\sum X_i A_i}{\sum A_i}$	$Y_c = \frac{\sum Y_i A_i}{\sum A_i}$	153000	-9000

$$\text{center} \begin{cases} X_c = \frac{153000}{5461.33} = 28.02 \text{cm} \\ Y_c = \frac{+9000}{5461.33} = +1.65 \text{cm} \end{cases}$$

مبدأ مختصات را مرکز دایره 0 در نظر گرفتیم و مختصات ها

را بر اساس این مبدأ تعریف نمودیم. و مختصات مرکز سطح

بدست آمده نیز بر اساس این مبدأ مختصات محاسبه شده است

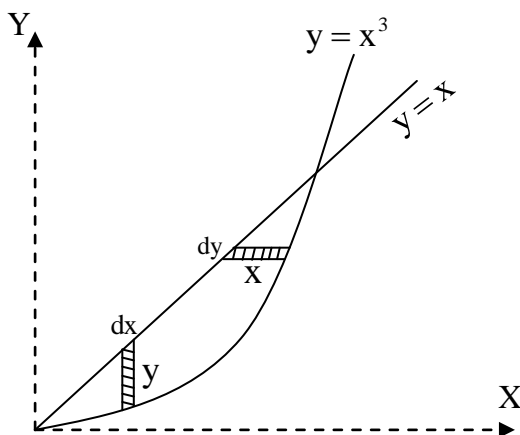
ب) مرکز سطح اشکال هندسی غیر منتظم:

با انتخاب المان مناسب و انتگرال گیری طبق فرمول های زیر می توان مختصات مرکز سطح را محاسبه کرد

$$\bar{X} = \frac{\int X dA}{A} \quad \text{برای محاسبه } \bar{X}, \text{ باید المان را عمودی انتخاب کنیم و از فرمول روبرو استفاده کنیم:}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int Y dA}{A} \quad \text{برای محاسبه } \bar{Y}, \text{ باید المان را افقی انتخاب کنیم و از فرمول روبرو استفاده کنیم:}$$

مثال) مرکز هندسی قسمت محصور شکل مقابل را بدست آورید:



$$dA = y dx \rightarrow A = \int y dx = \int_0^1 (y_2 - y_1) dx$$

$$\rightarrow A = \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\bar{X}A = \int X dA = \int_0^1 x y dx = \int_0^1 x (y_2 - y_1) dx$$

$$\rightarrow \bar{X}A = \int_0^1 x (x - x^3) dx = \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

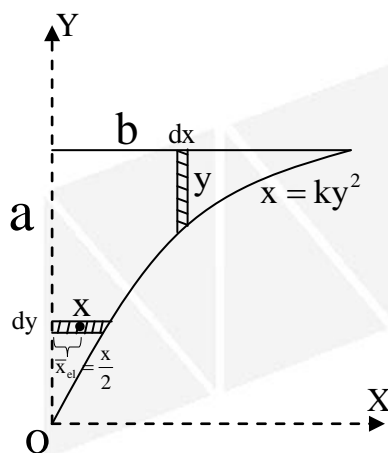
$$\rightarrow \bar{X}A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15} \quad \Rightarrow \bar{X} = \frac{\bar{X}A}{A} = \frac{2/15}{1/4} = \frac{8}{15}$$

$$dA = Xdy \rightarrow A = \int dA = \int (x_2 - x_1)dy = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - y)dy = \int_0^1 (y^{\frac{1}{3}} - y)dy = \left[\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{2} \right]$$

$$\rightarrow dA = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\bar{Y}A = \int ydA = \int_0^1 yx dy = \int_0^1 y(x_2 - x_1)dy = \int_0^1 y(\sqrt[3]{y} - y)dy = \int_0^1 y(y^{\frac{1}{3}} - y)dy = \int_0^1 (y^{\frac{4}{3}} - y^2)dy$$

$$\rightarrow \bar{Y}A = \left[\frac{y^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} = \frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{9-7}{21} = \frac{2}{21} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{\bar{Y}A}{A} = \frac{2/21}{1/4} = \frac{8}{21}$$



مثال (مرکز هندسی شکل محصور زیر را بدست آورید :

$$x = ky^2 \rightarrow b = ka^2 \rightarrow k = \frac{b}{a^2}$$

در نقطه (b,a) :

$$x = ky^2 \rightarrow y = \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dA = ydx \rightarrow A = \int_0^b a - \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left[ax - \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^b$$

$$\rightarrow A = \left[ab - \left(\frac{1}{\frac{b}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] = ab - \frac{a}{\frac{1}{b^2}} \times \frac{2b^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{2}}}{3} = \frac{3ab}{3} - \frac{2ab}{3} = \frac{ab}{3}$$

$$\bar{X}A = \int \bar{X}_c dA = \int_0^a \frac{x}{2} x dy = \int_0^a \frac{x^2}{2} dy = \int_0^a \frac{1}{2} \times k^2 y^4 dy = \left[\frac{k^2}{2} \times \frac{y^5}{5} \right]_0^a = \frac{b^2}{2a^4} \times \frac{a^5}{5} = \frac{ab^2}{10}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{\bar{X}A}{A} = \frac{\frac{ab^2}{10}}{\frac{ab}{3}} = \frac{3b}{10}$$

$$dA = xdy \rightarrow A = \int_0^a ky^2 dy = k \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \times \left[\frac{a^3}{3} \right] = \frac{ab}{3}$$

$$\bar{Y}A = \int ydA = \int yx dy \rightarrow A = \int_0^a yky^2 dy = \int_0^a ky^3 dy = \left[\frac{ky^4 x}{4} \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \times \frac{a^4}{4} = \frac{a^2 b}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{Y} = \frac{\bar{Y}A}{A} = \frac{\frac{a^2 b}{4}}{\frac{ab}{3}} = \frac{3a}{4}$$